

Анализ полученного решения

16/09

Задача:

$$u_t = a^2 u_{xx}, 0 \leq x \leq l, t \geq 0,$$

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$u = u(x, t) = ?$$

Ответ:  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi k x}{l},$

где  $A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx, k = \overline{1, \infty}$

Анализ

1) При  $t \rightarrow +\infty$  реш. экспоненциально  $\rightarrow 0$  с примерной ск-тью  $e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}$ , отвечающей  $k=1$ .



стержень остывает с экспоненциальной скоростью, принимаемая в  $\lim$ -е температуру окружающей среды

Здесь  $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ ; чем больше  $a^2$ , тем

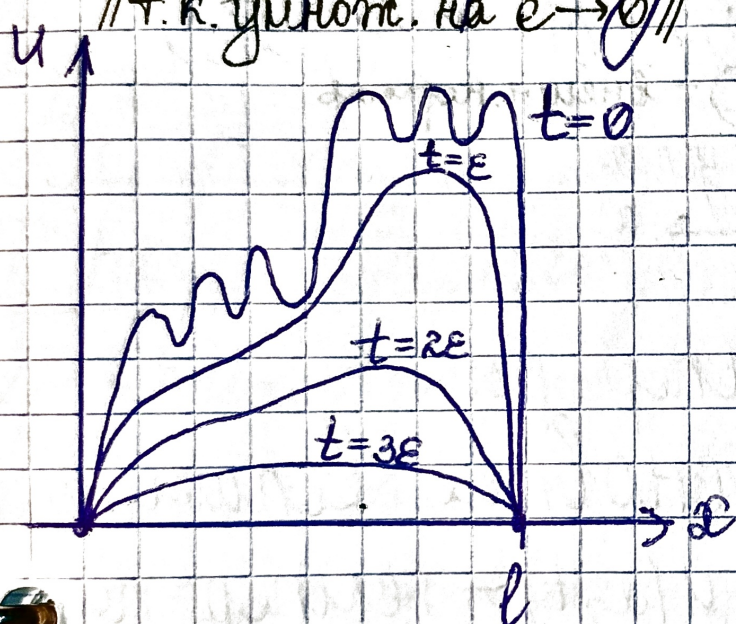
сильнее выражен этот процесс.

2) При  $t > 0$  высокие гармоники быстро пропадают

т.е.  $\sin$ , у  $k$  больше

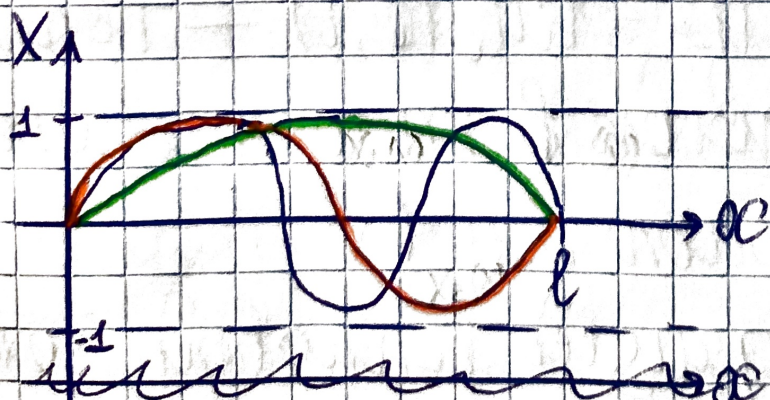
// т.к. умнож. на  $e^{-\dots}$  //

Графики



Графики гармоник:

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad k = 1, \infty$$



$X_1(x)$   
 $X_2(x)$   
 $X_3(x)$

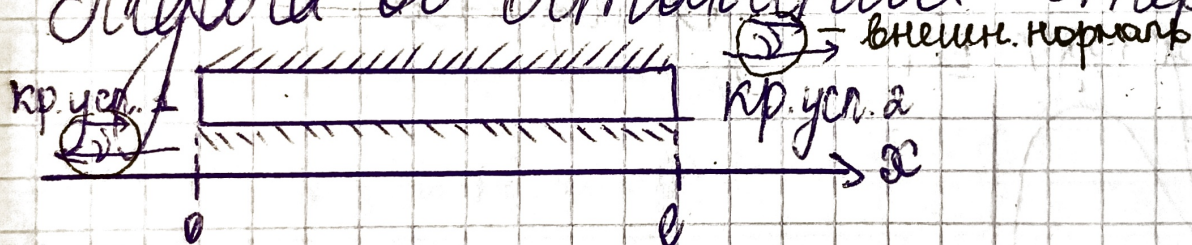


3) При  $t < 0$  рад скорее всего расх-ся из-за экспоненц. роста по  $k$  его коэффициенту  $A_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t}$ , т.е. процесс теплового процесса очень редко удается восстановить по его настоящему.

3 вида классических краевых условий

Ситуация

Задача об остывании стержня



Теория собств. темпер-ры

Основные величины:

$u = u(x, t)$  — темпер-ра в т.  $x$  в момент времени  $t$

$q = -k u_x(x, t)$  — тепловой поток в т.  $x$  в момент

времени  $t$  в <sup>направл.</sup> осн  $Ox$

$-k u_x(l, t)$  — выходящий тепловой поток в т.  $x = l$



$k u_x(0, t)$  — выходящий тепловой поток в  
т.с. = 0

$\left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{\Gamma}$  пропорц. теплов. потоку, направ-  
ление потока противополож. напр-ю норма-  
ли]

Классические краевые условия

I рода  $\begin{cases} u(0, t) = \mu_0(t), \\ u(l, t) = \mu_1(t) \end{cases}$

На границе задана темпер-ра

II рода На границе заданы тепловые  
потоки, напр. выходящие.

$k u_x(0, t) = \gamma_0(t), \quad -k u_x(l, t) = \gamma_1(t)$

В редукцированной форме:  $u_x(0, t) = \tilde{\gamma}_0(t),$

III рода На границе проис-  $u_x(l, t) = \tilde{\gamma}_1(t)$

ходит теплообмен с окр. средой, ск-ть тепло-  
обмена пропорц. перепаду темпер. тела и  
окр. среды

$+k u_x(0, t) = h_0(u(0, t) - u_0(t)),$  где  $u_0(t)$  —  
темпер. окр. среды при  $x=0$



-  $k u_x(l, t) = h_1 (u(l, t) - u_1(t))$ , где  $u_1(t)$  - темп-ра окр. среды при  $x=l$

Здесь  $h_0$  и  $h_1$  - коэфф-ты теплообмена

В редуцированной форме:

$$u_x(0, t) \equiv H_0 u(0, t) = \chi_0(t),$$

$$u_x(l, t) + H_1 u(l, t) = \chi_1(t)$$

Здесь  $H_0 = \frac{h_0}{k} > 0$ ,  $H_1 = \frac{h_1}{k} > 0$  - пост. коэфф.

Усл-я разных типов могут сочетаться на разных краях. Всего 9 сочетаний, т.е. возможно 9 класс. краев. задач

Введем компакт. обознач. для классиф. краев. операторов:

На левом краю:

$$I_0) \Gamma_0(u) \equiv u(0, t)$$

$$II_0) \Gamma_0(u) \equiv u_x(0, t)$$

$$III_0) \Gamma_0(u) \equiv u_x(0, t) - H u(0, t)$$

На правом краю:

$$I_l) \Gamma_l(u) \equiv u(l, t)$$

$$II_l) \Gamma_l(u) \equiv u_x(l, t)$$



$$\text{III}_e) \Gamma_e(u) = u_x(l, t) + H u(l, t)$$

$\Gamma_0, \Gamma_e \neq$  из указ. видов считаются классич. краев. условиями

Общая постановка смешанной краев.-краев. задачи д/одномер. ур-ния теплопроводности

На границе пока  $\neq$  однород. краев. усл.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0,$$

$$\Gamma_0(u) = 0 = \Gamma_e(u)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

$u = u(x, t) = ?$  Ф-ция  $\varphi(x)$  задана

Решение методом Фурье (разделение переменных)

Ищем элемент. реш.  $u(x, t) = T(t)X(x) \neq 0$

В ур-ние:  $T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$

Пропорция:  $\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda (\text{const})$

$$\Rightarrow X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

Добавляем краев. усл. из исход. задачи и получаем ЗМЛ



$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\Gamma_0(X) = 0, \quad \Gamma_l(X) = 0$$

Спектр  $\lambda_k$  — с.з.н.,  $X_k(x)$  — с.ф-ции,  
 $k = \overline{1, \infty}$  (или  $k = \overline{0, \infty}$ )

Подставляем  $\lambda_k$  в пропорцию

уравнение  $g / T(t)$

$$T''(t) = -\alpha^2 \lambda_k T(t) \text{ при } t \geq 0 \Rightarrow$$

$$T_k(t) = e^{-\alpha^2 \lambda_k t} \text{ при соотв. } k \text{ — частное реш.}$$

Получаем набор элемент. реш.:  $u_k(x, t) = e^{-\alpha^2 \lambda_k t} X_k(x)$  при  $k = \overline{1, \infty}$  (или  $k = \overline{0, \infty}$ )

Кажд. из этих ф-ций удовл. уравн. теплопроводности и нулевым кр. усл.

Принцип суперпозиции  $g /$  общ. реш.

$$u(x, t) = \sum_k A_k e^{-\alpha^2 \lambda_k t} X_k(x), \quad A_k = ?$$

Имеем усл.:  $u(x, 0) = \sum_k A_k X_k(x) = \varphi(x)$  — ряд Фурье  $g / \varphi(x)$  на  $[0, l]$  по с-ме с.ф-ций ЗУМ

Коэфф-ты — по Фурье:  $A_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx$



$X_k(x) dx$ ,  $\|X_k\|^2 = \int_0^l (X_k(x))^2 dx$  нпу бекс  
нумуах к

Омбери:  $u(x, t) = \sum_k A_k e^{-a^2 \pi^2 k^2 t} X_k(x)$

ге  $A_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l u(x) X_k(x) dx$ ,  $\|X_k\|^2 =$   
 $= \int_0^l (X_k(x))^2 dx$